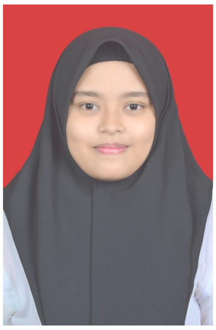
TRACE MATRIKS SIMETRIS 5X5 BERPANGKAT BILANGAN BULAT

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Fakultas Sains dan Teknologi

oleh :

SHINTYA PUTRI ALFIANOV
11654201488



FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2021

LEMBAR PERSETUJUAN

TRACE MATRIKS SIMETRIS 5X5
BERPANGKAT BILANGAN BULAT

TUGAS AKHIR

oleh:

SHINTYA PUTRI ALFIANOV
11654201488

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 07 Juli 2021

Ketua Program Studi	**Pembimbing**
Ari Pani Desvina, M.Sc.	**Fitri Aryani, M.Sc.**
NIP. 19811225 200604 2 003	**NIP. 19770913 200604 2 002**

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE MATRIKS SIMETRIS 5X5 BERPANGKAT BILANGAN BULAT

TUGAS AKHIR

oleh:

SHINTYA PUTRI ALFIANOV
11654201488

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 07 Juli 2021

Pekanbaru, 07 Juli 2021
Mengesahkan

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Hartono, M.Pd.	**Ari Pani Desvina, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	**NIP. 19811225 200604 2 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Wartono, M.Sc.**
Sekretaris	**: Fitri Aryani, M.Sc.**
Anggota I	**: Corry Corazon Marzuki, M.Si**
Anggota II	**: Ade Novia Rahma, M.Mat**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 07 Juli 2021

Yang membuat pernyataan,

SHINTYA PUTRI ALFIANOV

11654201488

LEMBAR PERSEMBAHAN

Sembah sujud serta syukur kepada Allah SWT
Taburan cinta dan kasih sayang-Mu yang telah memberiku ilmu, memberiku kekuatan dan kemudahan dalam menyelesaikan tugas akhir ini

Kupersembahkan karya kecil ini untuk:

Ayah (Alfi) dan ibu (Nafsi) adik (Adinda Afifah)
Terimakasih atas segala yang telah diberikan kepadaku,
cinta dan kasih serta do'a-do'a yang senantiasa mengiringi setiap langkah dan hembusan nafasku, keikhlasan dalam mendidik dan memberi dukungan.
Kini saatnya aku memulai perjuangan untuk mengukir senyum indah dan melukiskan kisah indah dalam perjalanan hidupmu.

Untuk keluarga besar (Khaniar dan BM)
Terimakasih atas segala do'a, motivasi yang telah kalian berikan kepadaku,
Terimakasih cinta dan kasih sehingga memberiku arti akan sebuah kekeluargaan

Untuk Pembimbing (Fitri Aryani,M.Sc)
Terimakasih telah meluangkan waktu dan sabar dalam membimbingku atas kelalaian dan kekuranganku dan juga telah banyak memberiku masukan dan motivasi untuk menyelesaikan tugas akhir ini

Untuk sahabat-sahabat Siti Faizah, Nurul Mufalhalivah,
Novita Yuliazmar L, Akbar D. Harahap
Terimakasih untuk semua do'a, motivasi, pertolongan yang telah kalian berikan.
Yang selalu ada dalam suka dan duka, yang menjadi salah satu tempat pengaduan selama menjalani perkuliahan. Semoga kesuksesan menyertai kita semua. Aamiin

TRACE MATRIKS SIMETRIS 5×5 BERPANGKAT BILANGAN BULAT

SHINTYA PUTRI ALFIANOV
NIM: 11654201488

Tanggal Sidang : 07 Juli 2021
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas mengenai bentuk umum perpangkatan matriks simetris 5×5 berbentuk khusus dan *trace* matriks simetris 5×5 berpangkat bilangan bulat. Bentuk umum matriks simetris 5×5 berpangkat bilangan bulat positif $\left(A_5{}^n\right)$ dan negatif $\left(A_5{}^{-n}\right)$ diperoleh dengan memangkatkan matriks $A_5{}^2$ sampai $A_5{}^{10}$ dan $A_5{}^{-2}$ sampai $A_5{}^{-10}$. Selanjutnya diduga bentuk umum matriks $\left(A_5{}^n\right)$ dan membuktikannya dengan metode induksi matematika. Dengan hal yang sama diduga bentuk umum matriks $\left(A_5{}^{-n}\right)$ dan dibuktikan menggunakan definisi invers. Terakhir diperoleh $tr\left(A_5{}^n\right)$ dan $tr\left(A_5{}^{-n}\right)$ dan dibuktikan dengan pembuktian langsung menggunakan definisi *trace*. Diberikan aplikasi dalam bentuk contoh.

Kata Kunci: *trace*, matriks simetris, perpangkatan matriks.

TRACE OF MATRIX SYMMETRIC 5×5 WITH THE POWER OF INTEGER

SHINTYA PUTRI ALFIANOV
NIM: 11654201488

Date of Final Exam : July 07, 2021
Date of Graduation :

Mathematics Program Study
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas Street No.155 Pekanbaru

ABSTRACT

This final project discussed the general form of the power of a symmetric matrix 5×5 and a symmetric trace matrix with the power of positive and negative integers. The general form of a symmetrical matrix 5×5 to the power of positive $(A_5{}^{n})$ and negative $(A_5{}^{-n})$ integers was obtained by raising the power of the matrices from $A_5{}^{1}$ up to $A_5{}^{10}$ and $A_5{}^{-1}$ until $A_5{}^{-10}$. Afterwards, the general form of the matrix $(A_5{}^{n})$ was estimated and proved by mathematical induction. In the same way, the general form of the matrix $(A_5{}^{-n})$ was assumed and proved using the inverse definition. Lastly, $tr(A_5{}^{n})$ and $tr(A_5{}^{-n})$ was obtained, proven by direct proof and its application was given in the form of examples.

Keywords: *trace, symmetric matrix, power of matrix.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr.Wb

Alhamdulillahi Rabbil 'Alamin, segala puji bagi Allah SWT yang selalu memberikan taufik, hidayah, kekuatan dan kesehatan sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul *Trace* Matriks Simetris 5×5 Berpangkat Bilangan Bulat. Sholawat dan salam terucap buat junjungan alam Nabi besar Muhammad SAW karena jasa beliau yang telah membawa manusia merasakan nikmatnya Islam seperti sekarang ini.

Tidak lupa penulis sampaikan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah membantu penulis, yang selalu memberikan semangat dan motivasinya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Pada kesempatan ini juga penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunnas, M.Ag, selaku Rektor Univeristas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc, selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc, selaku Pembimbing yang telah banyak meluangkan waktu, memberikan motivasi, dan masukan terhadap penulis, serta memberikan arahan dan bimbingan yang sangat berharga dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
5. Bapak Aprijon, S.Si. M.Ed, selaku Pembimbing Akademik yang telah banyak memberikan arahan dan bimbingan yang sangat berharga kepada penulis.
6. Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si dan Ibu Ade Novia Rahma, M.Mat, selaku penguji yang telah memberi arahan serta masukan kepada penulis.
7. Semua Dosen Program Studi Matematika yang telah memberi banyak ilmu, masukan, dukungan dan motivasi untuk penulis.

8. Orang tuaku tercinta Ayahanda Alfi, Ibunda Nafsi, serta adikku Adinda Afifah yang tidak pernah berhenti memberikan do'a, semangat, motivasi, bahkan senyum mereka kepada penulis kapanpun dan dimanapun mereka berada.
9. Lilik Purwati S, Arnis Cahya Sukma, Aminah Utami, Mahru Yeva, Nasriah yang telah memberikan do'a, dukungan serta pertolongan kepada penulis selama perkuliahan.
10. Seluruh teman-teman seperjuangan Jurusan Matematika angkatan 2016 terkhusus lokal C. Semoga kita selalu istiqamah dengan tujuan dan cita-cita kita.
11. Seluruh warga ambalan dan warga racana Pramuka UIN Suska yang telah memberikan do'a dan motivasi serta pertolongan kepada penulis selama bergabung dalam organisasi ini.
12. Dan semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Akhir kata semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi kita semua pihak yang berkepentingan dan terutama bagi penulis sendiri serta bagi para pembaca semua.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb

Pekanbaru, 28 Juni 2021

Shintya Putri Alfianov

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ada beberapa jenis matriks diantaranya matriks nol, matriks identitas, matriks diagonal, matriks simetris, matriks segitiga, dan lain-lain. Dalam teori matriks terdapat beberapa macam operasi matriks yaitu penjumlahan, perkalian, pengurangan, serta juga ada operasi determinan, invers, *trace* matriks, *trace* matriks berpangkat dan lain-lain.

Pembahasan kali ini mengenai *trace* matriks berpangkat. Dimana pembahasan *trace* matriks berpangkat ini telah banyak dilakukan oleh banyak peneliti sebelumnya. Untuk mendapatkan *trace* matriks berpangkat, maka matriks harus dipangkatkan terlebih dahulu sampai pangkat yang diinginkan. Selanjutnya, diperolehlah *trace* matriks dari bentuk perpangkatan matriks yang ada.

Penelitian mengenai *trace* matriks berpangkat ini dilakukan oleh beberapa peneliti, diantaranya oleh [1] pada tahun 2015 yang membahas tentang *trace* matriks berpangkat. Artikel tersebut menghasilkan persamaan bentuk umum *trace* matriks real 2×2 berpangkat bilangan bulat positif, sebagai berikut:

$$trA^n = \sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r} ,$$

jika n genap

$$trA^n = \sum_{r=0}^{n-1/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r} ,$$

jika n ganjil.

Pada tahun 2017, [2] juga melakukan penelitian dengan pembahasan yang sama mengenai *trace* matriks berpangkat. Dalam artikel tersebut mendapatkan bentuk umum dari *trace* matriks real 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif, yaitu:

$$tr(A^{-n}) = \frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n}$$

$$= \frac{\sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n},$$ jika n genap.

$$tr(A^{-n}) = \frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n}$$

$$= \frac{\sum_{r=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n},$$ jika n ganjil.

Selanjutnya pada tahun 2019, [3] melakukan penelitian masih membahas mengenai *trace* matriks berpangkat menggunakan matriks bujursangkar A_n, yaitu:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_i & a_i & \cdots & a_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$. Pada penelitian tersebut [3] mendapatkan hasil sebagai berikut:

$$tr(A_n)^m = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^m, \ \forall\ n \geq 2 \text{ dan } m \in Z^+.$$

Pada tahun 2020, [4] juga telah melakukan penelitian pada tugas akhirnya yang membahas mengenai *trace* matriks berpangkat. Pada penelitian tersebut [4] menggunakan matriks segitiga, yaitu matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah. Matriks segitiga atas berbentuk sebagi berikut: $A_4 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, $\forall a,b,c,d \in R$. Dan matriks segitiga bawah berbentuk sebagai berikut: $B_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$, $\forall a,b,c,d \in R$. Dari kedua jenis matriks segitiga yang digunakan menghasilkan*trace* yang sama, yaitu:

$$tr(A_4{}^{-n}) = tr(B_4{}^{-n}) = 4\left(\frac{1}{a^n}\right)$$

Berdasarkan beberapa penelitian tersebut, penulis tertarik untuk melakukan penelitian mengenai *trace* matriks simetris yang berordo 5×5 berpangkat bilangan bulat dengan entri bilangan real. Maka penulis mengambil judul proposal tugas akhir ini dengan judul ***"Trace Matriks Simetris*** 5×5 ***Berpangkat Bilangan Bulat"***.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas maka didapatkan satu rumusan masalah yaitu bagaimana bentuk umum dari *trace* matriks simetris 5×5 berpangkat bilangan bulat.

1.3 Batasan Masalah

Untuk membatasi meluasnya pembahasan pada tugas akhir ini maka diberikan batasan pada pembahasan ini yaitu dengan menggunakan matriks simetris yang berordo 5×5, yang berbentuk sebagai berikut:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix}, \ \forall b \in R, \ b \neq 0 \qquad (1.1)$$

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penulisan tugas akhir ini adalah untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks simetris pada Persamaan (1.1) berpangkat bilangan bulat.

1.5 Manfaat Penelitian

Beberapa manfaat dari penulisan proposal ini adalah:

1. Memberikan wawasan kepada penulis dan pembaca tentang *trace* matriks simetris 5×5 berpangkat bilangan bulat.
2. Sebagai referensi baru didunia pendidikan khususnya dibidang ilmu matematika.

1.6 Sistematika Penelitian

Adapun sistematika penulisan tugas akhir ini dibagi menjadi beberapa bab. Berikut penjelasan masing-masing bab:

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini berisikan latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini menjelaskan landasan teori yang digunakan yaitu matriks simetris, perkalian matriks, determinan matriks, invers matriks, *trace* matriks, *trace* matriks berpangkat, dan induksi matematika.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini berisikan langkah-langkah yang digunakan untuk menemukan bentuk umum dari *trace* matriks simetris 5×5 berpangkat bilangan bulat.

BAB IV PEMBAHASAN

Pada bab ini diuraikan langkah-langkah untuk menentukan bentuk umum *trace* matriks simetris 5×5 berpangkat bilangan bulat serta pengaplikasian bentuk *trace* matriks simetris 5×5 berpangkat bilangan bulat.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini berisikan kesimpulan dari seluruh bab yang ada pada tugas ini dan saran sebagai hasil penelitian yang telah dilakukan.

BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dijelaskan beberapa landasan teori yang berhubungan dengan materi matriks simetris, perkalian matriks, determinan matriks, invers matriks, *trace* matriks, *trace* matriks berpangkat dan induksi matematika.

2.1 Matriks Simetris

Definisi 2.1 Pengertian Matriks Simetris [5] Suatu matriks bujursangkar A adalah simetrik (*symmetric*) jika $A = A^t$.

Contoh 2.1 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5/8 & -1 \\ 7 & 5 & 0 & 2 \\ 5/8 & 0 & -3 & 12 \\ -1 & 2 & 12 & 36 \end{bmatrix}$,

maka $A^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B^t = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5/8 & -1 \\ 7 & 5 & 0 & 2 \\ 5/8 & 0 & -3 & 12 \\ -1 & 2 & 12 & 36 \end{bmatrix}$.

Jelas terlihat bahwa $A = A^t$ dan $B = B^t$, maka A dan B simetris.

Teorema 2.1 Sifat-sifat Matriks Simetris [5] Jika A dan B adalah matriks-matriks simetris dengan ukuran yang sama, dan jika k adalah skalar sebarang, maka:

(a) A^t adalah simetris
(b) $A + B$ dan $A - B$ adalah simetris
(c) kA adalah simetris

Contoh 2.2 Diberikan matriks $A=\begin{bmatrix}3&2&3&4&5\\2&4&1&7&3\\3&1&2&2&5\\4&7&2&5&1\\5&3&5&1&2\end{bmatrix}$, dan $B=\begin{bmatrix}2&4&2&6&2\\4&7&3&7&1\\2&3&6&5&5\\6&7&5&2&3\\2&1&5&3&1\end{bmatrix}$

maka tunjukkan:

a. Matriks A dan B simetris

b. $A+B$ dan $A-B$ adalah simetris

c. kA dan kB adalah simetris

Penyelesaian:

a. Akan dibuktikan bahwa A dan B adalah simetris. Berdasarkan matriks A dan B maka diperoleh

$$A^t=\begin{bmatrix}3&2&3&4&5\\2&4&1&7&3\\3&1&2&2&5\\4&7&2&5&1\\5&3&5&1&2\end{bmatrix}, \text{ dan } B^t=\begin{bmatrix}2&4&2&6&2\\4&7&3&7&1\\2&3&6&5&5\\6&7&5&2&3\\2&1&5&3&1\end{bmatrix}.$$

Dapat dilihat bahwa $A=A^t$ dan $B=B^t$, maka matriks A dan B adalah simetris

b. Akan dibuktikan bahwa $(A+B)$ dan $(A-B)$ adalah simetris.

i. Akan ditunjukkan bahwa $(A+B)=(A+B)^t$. Berdasarkan matriks A dan B maka, diperoleh

$$A+B=\begin{bmatrix}3&2&3&4&5\\2&4&1&7&3\\3&1&2&2&5\\4&7&2&5&1\\5&3&5&1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&4&2&6&2\\4&7&3&7&1\\2&3&6&5&5\\6&7&5&2&3\\2&1&5&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&6&5&10&7\\6&11&4&14&4\\5&4&8&7&10\\10&14&7&7&4\\7&4&10&4&3\end{bmatrix}$$

$$\text{dan } (A+B)^t = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 5 & 10 & 7 \\ 6 & 11 & 4 & 14 & 4 \\ 5 & 4 & 8 & 7 & 10 \\ 10 & 14 & 7 & 7 & 4 \\ 7 & 4 & 10 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

terbukti bahwa $(A+B) = (A+B)^t$, maka $(A+B)$ adalah simetris.

ii. Akan ditunjukkan bahwa $(A-B) = (A-B)^t$. Berdasarkan matriks A dan B maka, diperoleh

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & 7 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{dan } (A-B)^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ maka } (A-B) = (A-B)^t .$$

Artinya $(A-B)$ simetris.

c. Akan dibuktikan kA dan kB adalah simetrik. Berdasarkan matriks A dan B, k adalah skalar, maka:

$$kA = k \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & 2k & 3k & 4k & 5k \\ 2k & 4k & k & 7k & 3k \\ 3k & k & 2k & 2k & 5k \\ 4k & 7k & 2k & 5k & k \\ 5k & 3k & 5k & k & 2k \end{bmatrix}$$

$$\text{dan } (kA)^t = \begin{bmatrix} 3k & 2k & 3k & 4k & 5k \\ 2k & 4k & k & 7k & 3k \\ 3k & k & 2k & 2k & 5k \\ 4k & 7k & 2k & 5k & k \\ 5k & 3k & 5k & k & 2k \end{bmatrix}, \text{ sehingga } kA = (kA)^t .$$

$$kB = k \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & 7 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & 4k & 2k & 6k & 2k \\ 4k & 7k & 3k & 7k & k \\ 2k & 3k & 6k & 5k & 5k \\ 6k & 7k & 5k & 2k & 3k \\ 2k & k & 5k & 3k & k \end{bmatrix}$$

dan $(kB)^t = \begin{bmatrix} 2k & 4k & 2k & 6k & 2k \\ 4k & 7k & 3k & 7k & k \\ 2k & 3k & 6k & 5k & 5k \\ 6k & 7k & 5k & 2k & 3k \\ 2k & k & 5k & 3k & k \end{bmatrix}$, sehingga $kB = (kB)^t$.

Terbukti bahwa *kA* dan *kB* adalah simetris.

2.2 Perkalian Matriks

2.2.1 Perkalian Dengan Skalar

Definisi 2.2 Pengertian Perkalian Matriks Dengan Skalar [5] Jika *A* adalah matriks sebarang dan *c* adalah skalar sebarang, maka ***hasilkali***-*nya (product) cA* adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks A dengan bilangan *c*. Matriks *cA* disebut sebagai ***kelipatan skalar*** (*scalar multiple*) dari *A*.

Contoh 2.3: Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3\frac{1}{2} & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ dan $k = -4$. Maka,

$$kA = -4\begin{bmatrix} 3\frac{1}{2} & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-4)\frac{7}{2} & (-4)(-2) & (-4)4 \\ (-4)3 & (-4)1 & (-4)(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 8 & -16 \\ -12 & -4 & 28 \end{bmatrix}.$$

2.2.2 Perkalian Dua Buah Matriks

Definisi 2.3 Pengertian Perkalian Dua Buah Matriks [5] Jika *A* adalah matriks $m \times r$ dan *B* adalah matriks $r \times n$ maka ***hasilkali*** (*product*) *AB* adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris *i* dan kolom *j* dari *AB*, pisahkanlah baris *i* dari matriks *A* dan kolom *j* dari matriks *B*. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh.

Dua buah matriks dapat dikalikan jika jumlah kolom matriks pertama sama dengan jumlah baris matriks kedua. Misalkan $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ adalah matriks $m \times n$ dan $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ adalah matriks $n \times p$. Maka, perkalian *A* dan *B*, dilambangkan matriks $C = \lfloor c_{ij} \rfloor$ yang berukuran $m \times p$.

Contoh 2.4:

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, maka:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{bmatrix}.$$

2.2.3 Perpangkatan Matriks

Definisi 2.4 Pengertian Perpangkatan Matriks [5] Jika A adalah matriks bujursangkar, maka definisi dari pangkat integer taknegatif dari A adalah

$$A^0 = I \quad A^n = \underbrace{AA\ldots A}_{nfaktor} \; (n > 0).$$

Selanjutnya, jika A dapat dibalik, maka definisi dari pangkat integer negative dari A adalah

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\ldots A^{-1}}_{nfaktor}.$$

Contoh 2.5:

Misalkan A dan A^{-1} adalah matriks ukuran 2×2, yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{dan } A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

maka

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix}, \text{ dan}$$

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix}.$$

2.3 Determinan dan Invers Matriks

Definisi 2.5 Pengertian Determinan Matriks [5] Misalkan A adalah suatu bujursangkar. ***Fungsi determinan*** (*determinant function*) dinotasikan dengan ***det*** dan kita mendefinisikan det(A) sebagai jumlah dari semua hasilkali elementer bertanda dari A. Angka det(A) disebut *determinan dari A* (*determinant of A*).

Untuk menghitung determinan matriks dapat dilakukan dengan berbagai metode, salah satunya adalah dengan kofaktor.Berikut adalah definisi dan teorema yang berkaitan dengan kofaktor.

Definisi 2.6 Pengertian Kofaktor Matriks [5] Jika A adalah suatu matriks bujursangkar, maka ***minor dari entri*** $\boldsymbol{a_{ij}}$ dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij}dan disebut sebagai ***kofaktor dari entri*** $\boldsymbol{a_{ij}}$.

Contoh 2.6: Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, maka

minor dari entri a_{32} adalah

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26, \text{ dan}$$

kofaktor dari a_{32} adalah

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -26$$

Teorema 2.2 Determinan Dengan Kofaktor [5] Determinan dari matriks $A_{n\times n}$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasilkali-hasilkali yang diperoleh; dimana untuk setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \tag{2.1}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-*j*)

dan

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \tag{2.2}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-*i*)

Contoh 2.7: Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$. Hitunglah det(*A*) dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama dari *A*.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - (-2)(-2) + 5(3) = -1.$$

Definisi 2.7 Pengertian Invers Matriks [5] Jika *A* adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks *B* yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga *AB* = *BA* = *I*, maka *A* disebut ***dapat dibalik*** (*invertible*) dan *B* disebut sebagai ***invers*** *(inverse)* dari *A*. Jika matriks *B* tidak dapat didefinisikan, maka *A* dinyatakan sebagai ***matriks singular***.

Definisi 2.8 Pengertian Adjoin Matriks [5] Jika *A* adalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut ***matriks kofaktor dari A*** *(matrix of cofactors from A)*. Transpos dari matriks ini disebut ***adjoin dari A*** *(adjoint of A)* dan dinyatakan sebagai adj(A).

Contoh 2.8: Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, maka

kofaktor-kofaktor dari A adalah

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 1.(0-(-12)) = 12$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1).(0-6) = 6$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 1.(-4-12) = -16$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -1.(0-4) = 4$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1.(0-(-2)) = 2$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -1.(-12-2) = 14$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 1.(3-(-6)) = 9$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1.(9-(-1)) = -10$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 1.(18-1) = 17$$

jadi matriks kofaktornya adalah

$$C = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 14 \\ 9 & -10 & 17 \end{bmatrix}$$

dan adjoin dari A adalah

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 9 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 14 & 17 \end{bmatrix}$$

Teorema 2.3 Teorema Invers [5] Jika A adalah sebuah matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A).$$

Contoh 2.9: Diberikan sebuah matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$. Tentukan invers dari matriks A tersebut.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan Persamaan (2.2) dan dari Contoh (2.9) maka didapatkan $\det(A) = 58$. Jadi,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{58}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 9 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 14 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{58} & \frac{4}{58} & \frac{9}{58} \\ \frac{6}{58} & \frac{2}{58} & -\frac{10}{58} \\ -\frac{16}{58} & \frac{14}{58} & \frac{17}{58} \end{bmatrix}.$$

Untuk menunjukkan bahwa invers dari matriks A adalah benar, maka dilakukan pembuktian menggunakan aturan invers yaitu $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

$$A^{-1}A = I$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12}{58} & \frac{4}{58} & \frac{9}{58} \\ \frac{6}{58} & \frac{2}{58} & \frac{-10}{58} \\ \frac{-16}{58} & \frac{14}{58} & \frac{17}{58} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{36}{58} + \frac{4}{58} + \frac{18}{58} & \frac{12}{58} + \frac{24}{58} - \frac{36}{58} & \frac{-12}{58} + \frac{12}{58} + 0 \\ \frac{18}{58} + \frac{2}{58} - \frac{20}{58} & \frac{6}{58} + \frac{12}{58} + \frac{40}{58} & \frac{-6}{58} + \frac{6}{58} + 0 \\ \frac{-48}{58} + \frac{14}{58} + \frac{34}{58} & \frac{-16}{58} + \frac{48}{58} - \frac{68}{58} & \frac{16}{58} + \frac{42}{58} + 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Terbukti bahwa invers dari matriks A tersebut benar.

2.4 *Trace* Matriks

Definisi 2.9 Pengertian *Trace* Matriks [5] Jika A adalah sebuah matriks bujursangkar, maka ***trace dari A*** *(trace of A)*, yang dinyatakan sebagai *tr*(A), didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama A. *Trace* dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks bujursangkar.

Contoh 2.10:

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Hitung *tr*(A) dan *tr*(A^2)!

Penyelesaian:

Dengan menggunakan Definisi (2.9), maka *tr*(A) dan *tr*(A^2) adalah sebagai berikut:

tr(A)= 2 – 2 + 1 = 1, dan

$$A^2 = A \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & 3 & 9 \\ -20 & 9 & 4 \\ -9 & -1 & -6 \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$tr(A^2) = (-8) + 9 + (-6) = -5.$$

2.5 *Trace* Matriks Berpangkat Bilangan Bulat

2.5.1 *Trace* Matriks Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Pada tahun 2019, [6] melakukan penelitian mengenai *trace* matriks berpangkat. Pada penelitian tersebut [6] membahas tentang *trace* matriks segitiga berpangkat bilangan bulat positif. Adapun langkah-langkah dalam penelitian tersebut adalah sebagai berikut:

a. Diberikan matriks segitiga atas 5×5 dan matriks segitiga bawah 5×5 sebagai berikut:

$$A_5=\begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall, a,b,c,d,e\in R$$

$$B_5=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 & 0 \\ d & c & b & a & 0 \\ e & d & c & b & a \end{bmatrix}, \forall, a,b,c,d,e\in R$$

b. Menduga bentuk umum matriks $A_5^{\ n}$ dan $B_5^{\ n}$.

Untuk menduga bentuk umum matriks $A_5^{\ n}$ dan $B_5^{\ n}$, maka dilakukan dengan perpangkatan matriks $A_5^{\ 2}$ sampai A_5^{10} dan perpangkatan matriks $B_5^{\ 2}$ sampai B_5^{10}. Maka dari hasil matriks $A_5^{\ 2}$ sampai A_5^{10} dan matriks $B_5^{\ 2}$ sampai B_5^{10} dapat diduga bentuk umum matriks $A_5^{\ n}$ dan $B_5^{\ n}$. Dalam penelitian tersebut didapatkan hasil dugaan bentuk umum matriks $A_5^{\ n}$ dan $B_5^{\ n}$ sebagai berikut:

$$A_5^{\ n}=\begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}d+n(n-1)a^{n-2}bc+\left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}\right)a^{n-3}b^3 & \begin{matrix} na^{n-1}e+n(-1)a^{n-2}bd+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}c^2+\left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{2}\right) \\ a^{n-3}b^3c+\left(\frac{(n-2)^4+2(n-2)^3-(n-2)^2-2(n-2)}{24}\right)a^{n-4}b^4 \end{matrix} \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}d+n(n-1)a^{n-2}bc+\left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

$$B_5{}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ na^{n-1}b & a^n & 0 & 0 & 0 \\ na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}\right)a^{n-3}b^3 & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n & 0 \\ \begin{matrix} na^{n-1}e + n(n-1)a^{n-2}bd + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}c^2 + \left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{2}\right) \\ a^{n-3}b^2c + \left(\frac{(n-2)^4+2(n-2)^3-(n-2)^2-2(n-2)}{24}\right)a^{n-4}b^4 \end{matrix} & na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}\right)a^{n-3}b^3 & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n \end{bmatrix}$$

c. Membuktikan bentuk umum matriks $A_5{}^n$ dan $B_5{}^n$.

Pada penelitian ini, [6] menggunakan metode induksi matematika dalam pembuktian bentuk umum matriks $A_5{}^n$ dan $B_5{}^n$. Adapun langkah-langkah dalam pembuktian ini sebagai berikut:

Misal:

$$p(n): A_5{}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}\right)a^{n-3}b^3 & \begin{matrix} na^{n-1}e + n(-1)a^{n-2}bd + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}c^2 + \left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{2}\right) \\ a^{n-3}b^3c + \left(\frac{(n-2)^4+2(n-2)^3-(n-2)^2-2(n-2)}{24}\right)a^{n-4}b^4 \end{matrix} \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}, \forall n \in Z^+$$

1. Akan ditunjukkan $p(1)$ benar, yaitu:

$$p(1): A_5{}^1 = \begin{bmatrix} a^1 & 1a^{1-1}b & 1a^{1-1}c + \frac{1}{2}1(1-1)a^{1-2}b^2 & 1a^{1-1}d + 1(1-1)a^{1-2}bc + \left(\frac{(1-1)^3-(1-1)}{6}\right)a^{1-3}b^3 & \begin{matrix} 1a^{1-1}e + 1(1-1)a^{1-2}bd + \frac{1}{2}1(1-1)a^{1-2}c^2 + \left(\frac{(1-1)^3-(1-1)}{2}\right) \\ a^{1-3}b^2c + \left(\frac{(1-2)^4+2(1-2)^3-(1-2)^2-2(1-2)}{24}\right)a^{1-4}b^4 \end{matrix} \\ 0 & a^1 & 1a^{1-1}b & 1a^{1-1}c + \frac{1}{2}1(1-1)a^{1-2}b^2 & 1a^{1-1}d + 1(1-1)a^{1-2}bc + \left(\frac{(1-1)^3-(1-1)}{6}\right)a^{1-3}b^3 \\ 0 & 0 & a^1 & 1a^{1-1}b & 1a^{1-1}c + \frac{1}{2}1(1-1)a^{1-2}b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^1 & 1a^{1-1}b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^1 \end{bmatrix}$$

$$A_5{}^1 = \begin{bmatrix} a^1 & 1a^0b & 1a^0c + \frac{1}{2}1(0)a^{-1}b^2 & 1a^0d + 1(0)a^{-1}bc + \left(\frac{(0)^3-(0)}{6}\right)a^{-2}b^3 & \begin{matrix} 1a^0e + 1(0)a^{-1}bd + \frac{1}{2}1(0)a^{-1}c^2 + \left(\frac{(0)^3-(0)}{2}\right) \\ a^{-2}b^2c + \left(\frac{(-1)^4+2(-1)^3-(-1)^2-2(-1)}{24}\right)a^{-3}b^4 \end{matrix} \\ 0 & a^1 & 1a^0b & 1a^0c + \frac{1}{2}1(0)a^{-1}b^2 & 1a^0d + 1(0)a^{-1}bc + \left(\frac{(0)^3-(0)}{6}\right)a^{-2}b^3 \\ 0 & 0 & a^1 & 1a^0b & 1a^0c + \frac{1}{2}1(0)a^{-1}b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^1 & 1a^0b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^1 \end{bmatrix}$$

$$A_5^{\,1} = \begin{bmatrix} a^1 & b & c+0 & d+0+0 & e+0+0+0 \\ 0 & a^1 & b & c+0 & d+0+0 \\ 0 & 0 & a^1 & b & c+0 \\ 0 & 0 & 0 & a^1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa $p(1)$ benar.

2. Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): A_5^{\,k} = \begin{bmatrix} a^k & 1a^{k-1}b & ka^{k-1}c + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 & ka^{k-1}d + k(k-1)a^{k-2}bc + \left(\frac{(k-1)^3-(k-1)}{6}\right)a^{k-3}b^3 & \begin{matrix} ka^{k-1}e + k(k-1)a^{k-2}bd + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}c^2 + \left(\frac{(k-1)^3-(k-1)}{2}\right) \\ a^{k-3}b^2c + \left(\frac{(k-2)^4+2(k-2)^3-(k-2)^2-2(k-2)}{24}\right)a^{k-4}b^4 \end{matrix} \\ 0 & a^k & 1a^{k-1}b & ka^{k-1}c + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 & ka^{k-1}d + 1(k-1)a^{k-2}bc + \left(\frac{(k-1)^3-(k-1)}{6}\right)a^{k-3}b^3 \\ 0 & 0 & a^k & 1a^{k-1}b & ka^{k-1}c + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^k \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan $p(k+1)$ juga benar, yaitu:

$$p(k+1): A_5^{\,k+1} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^kb & (k+1)a^kc + \frac{1}{2}(k+1)ka^{k-1}b^2 & (k+1)a^kd + (k+1)ka^{k-1}bc + \left(\frac{k^3-k}{6}\right)a^{k-2}b^3 & \begin{matrix} (k+1)a^ke + (k+1)ka^{k-1}bd + \frac{1}{2}(k+1)ka^{k-1}c^2 + \left(\frac{k^3-k}{2}\right) \\ a^{k-2}b^2c + \left(\frac{(k-1)^4+2(k-1)^3-(k-1)^2-2(k-1)}{24}\right)a^{k-3}b^4 \end{matrix} \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^kb & (k+1)a^kc + \frac{1}{2}(k+1)ka^{k-1}b^2 & (k+1)a^kd + 1(k+1)ka^{k-1}bc + \left(\frac{k^3-k}{6}\right)a^{k-2}b^3 \\ 0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^kb & (k+1)a^kc + \frac{1}{2}(k+1)ka^{k-1}b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^kb \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa:

$$A^{k+1} = A^k A$$

$$
=\begin{bmatrix}
a^k & 1a^{k-1}b & ka^{k-1}c+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 & ka^{k-1}d+k(k-1)a^{k-2}bc+\left(\frac{(k-1)^3-(k-1)}{6}\right)a^{k-3}b^3 & \begin{array}{c} ka^{k-1}e+k(k-1)a^{k-2}bd+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}c^2+\left(\frac{(k-1)^3-(k-1)}{2}\right) \\ a^{k-3}b^2c+\left(\frac{(k-2)^4+2(k-2)^3-(k-2)^2-2(k-2)}{24}\right)a^{k-4}b^4 \end{array} \\
0 & a^k & 1a^{k-1}b & ka^{k-1}c+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 & ka^{k-1}d+1(k-1)a^{k-2}bc+\left(\frac{(k-1)^3-(k-1)}{6}\right)a^{k-3}b^3 \\
0 & 0 & a^k & 1a^{k-1}b & ka^{k-1}c+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 \\
0 & 0 & 0 & a^k & ka^{k-1}b \\
0 & 0 & 0 & 0 & a^k
\end{bmatrix}
\bullet
\begin{bmatrix}
a & b & c & d & e \\
0 & a & b & c & d \\
0 & 0 & a & b & c \\
0 & 0 & 0 & a & b \\
0 & 0 & 0 & 0 & a
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
a^ka & a^kb+ka^{k-1}ba & a^kc+ka^{k-1}b^2+ka^{k-1}ca+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2a & \begin{array}{c} a^kd+ka^{k-1}bc+ka^{k-1}cb+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2b+ \\ ka^{k-1}da+k(k-1)a^{k-2}bca\left(\frac{(k-1)^3-(k-1)}{6}\right)a^{k-3}b^3a \end{array} & \begin{array}{c} ka^{k-1}e+k(k-1)a^{k-2}bd+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}c^2+\left(\frac{(k-1)^3-(k-1)}{2}\right) \\ a^{k-3}b^2c+\left(\frac{(k-2)^4+2(k-2)^3-(k-2)^2-2(k-2)}{24}\right)a^{k-4}b^4 \end{array} \\
0 & a^ka & a^kb+ka^{k-1}ba & a^kc+ka^{k-1}b^2+ka^{k-1}ca+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2a & \begin{array}{c} a^kd+ka^{k-1}bc+ka^{k-1}cb+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2b+ \\ ka^{k-1}da+k(k-1)a^{k-2}bca\left(\frac{(k-1)^3-(k-1)}{6}\right)a^{k-3}b^3a \end{array} \\
0 & 0 & a^ka & a^kb+ka^{k-1}ba & a^kc+ka^{k-1}b^2+ka^{k-1}ca+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2a \\
0 & 0 & 0 & a^ka & a^kb+ka^{k-1}ba \\
0 & 0 & 0 & 0 & a^ka
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
a^{k+1} & (k+1)a^kb & (k+1)a^kc+\frac{1}{2}(k+1)ka^{k-1}b^2 & (k+1)a^kd+(k+1)ka^{k-1}bc+\left(\frac{k^3-k}{6}\right)a^{k-2}b^3 & \begin{array}{c} (k+1)a^ke+(k+1)ka^{k-1}bd+\frac{1}{2}(k+1)ka^{k-1}c^2+\left(\frac{k^3-k}{2}\right)a^{k-2}b^2c+ \\ \left(\frac{(k-1)^4+2(k-1)^3-(k-1)^2-2(k-1)}{24}\right)a^{k-3}b^4 \end{array} \\
0 & a^{k+1} & (k+1)a^kb & (k+1)a^kc+\frac{1}{2}(k+1)ka^{k-1}b^2 & (k+1)a^kd+(k+1)ka^{k-1}bc+\left(\frac{k^3-k}{6}\right)a^{k-2}b^3 \\
0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^kb & (k+1)a^kc+\frac{1}{2}(k+1)ka^{k-1}b^2 \\
0 & 0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^kb \\
0 & 0 & 0 & 0 & a^{k+1}
\end{bmatrix}
$$

Dengan melihat hasil matriks $A_5^{\,k+1}$ maka $p(k+1)$ benar. Berdasarkan langkah 1 dan 2 maka bentuk umum matriks $A_5^{\,n}$ terbukti benar.

Sama halnya dengan pembuktian bentuk umum matriks $A_5^{\,n}$, langkah untuk membuktikan bentuk umum matriks $B_5^{\,n}$ telah dilakukan oleh [6] dan mendapatkan hasil bahwa bentuk umum matriks $B_5^{\,n}$ juga terbukti benar.

d. Membuktikan bentuk umum *trace* matriks $A_5^{\,n}$ dan $B_5^{\,n}$.

Berdasarkan hasil bentuk umum matriks $A_5^{\,n}$, maka dapat diperoleh *trace* matriks $A_5^{\,n}$ sebagai berikut:

$$tr(A_5^{\,n})=5(a^n), \forall n \in Z^+$$

Bukti:

$$tr(A_5{}^n) = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}\right)a^{n-3}b^3 & \begin{matrix} na^{n-1}e + n(n-1)a^{n-2}bd + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}c^2 + \left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{2}\right) \\ a^{n-3}b^2c + \left(\frac{(n-2)^4+2(n-2)^3-(n-2)^2-2(n-2)}{24}\right)a^{n-4}b^4 \end{matrix} \\ & a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}\right)a^{n-3}b^3 \\ & & a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 \\ & & & a^n & na^{n-1}b \\ & & & & a^n \end{bmatrix}$$

$$= a^n + a^n + a^n + a^n + a^n$$
$$= 5(a^n)$$

Dan berdasarkan hasil bentuk umum matriks $B_5{}^n$, maka dapat diperoleh *trace* matriks $B_5{}^n$ sebagai berikut:

$$tr(B_5{}^n) = 5(a^n), \forall n \in Z^+$$

Bukti:

$$tr(B_5{}^n) = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ na^{n-1}b & a^n & 0 & 0 & 0 \\ na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}\right)a^{n-3}b^3 & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n & 0 \\ \begin{matrix} na^{n-1}e + n(n-1)a^{n-2}bd + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}c^2 + \left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{2}\right) \\ a^{n-3}b^2c + \left(\frac{(n-2)^4+2(n-2)^3-(n-2)^2-2(n-2)}{24}\right)a^{n-4}b^4 \end{matrix} & na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}\right)a^{n-3}b^3 & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n \end{bmatrix}$$

$$= a^n + a^n + a^n + a^n + a^n$$
$$= 5(a^n)$$

2.5.2 *Trace* Matriks Berpangkat Bilangan Bulat Negatif

Pada tahun 2020, [7] melakukan penelitian yang membahas tentang *trace* matriks berpangkat bilangan bulat negatif. Pada penelitian ini [7] menggunakan matriks segitiga yang berordo 5×5. Berikut merupakan langkah-langkah penelitiannya:

a. Diberikan matriks segitiga atas 5×5 dan matriks segitiga bawah 5×5 sebagai berikut:

$$A_5 = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall, a, b, c, d, e \in R$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 & 0 \\ d & c & b & a & 0 \\ e & d & c & b & a \end{bmatrix}, \forall, a, b, c, d, e \in R$$

b. Menduga bentuk umum matriks (A_5^{-n}) dan (B_5^{-n}).

Agar mendapatkan bentuk umum matriks (A_5^{-n}) dan (B_5^{-n}), langkah-langkah yang akan dilakukan adalah mendapatkan invers dari matriks (A_5) dan (B_5). Selanjutnya dilakukan perpangkatan dari invers matriks tersebut. Berikut ini invers matriks (A_5) dan (B_5) yaitu:

$$(A_5^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{a^2} & \frac{-ca+b^2}{a^3} & \frac{-da^2+2abc-b^3}{a^4} & \frac{-ea^3+2a^2bd+c^2a^2-3acb^2+b^4}{a^5} \\ 0 & \frac{1}{a} & \frac{-b}{a^2} & \frac{-ca+b^2}{a^3} & \frac{-da^2+2abc-b^3}{a^4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & \frac{-b}{a^2} & \frac{-ca+b^2}{a^3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & \frac{-b}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

dan

$$(B_5^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-b}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-ca+b^2}{a^3} & \frac{-b}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{-da^2+2abc-b^3}{a^4} & \frac{-ca+b^2}{a^3} & \frac{-b}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{-ea^3+2a^2bd+c^2a^2-3acb^2+b^4}{a^5} & \frac{-da^2+2abc-b^3}{a^4} & \frac{-ca+b^2}{a^3} & \frac{-b}{a^2} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan invers dari matriks (A_5) dan (B_5), selanjutnya akan dilakukan perpangkatan matriks (A_5^{-1}) sampai (A_5^{-10}) dan matriks (B_5^{-1}) sampai (B_5^{-10}). Dan setelah mendapatkan hasil perpangkatan matriks (A_5^{-1}) sampai (A_5^{-10}) dan matriks (B_5^{-1}) sampai (B_5^{-10}), maka dapat diduga bentuk umum (A_5^{-n}) dan (B_5^{-n}).

Untuk matriks segitiga atas (A_5^{-n}):

$$A_5^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{-nca+\frac{1}{2}n(n+1)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-nda^2+n(n+1)abc-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3}{a^{n+3}} & \frac{-nea^3+n(n+1)a^2bd+\frac{1}{2}n(n+1)c^2a^2-\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)acb^2+\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)b^4}{a^{n+4}} \\ 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{-nca+\frac{1}{2}n(n+1)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-nda^2+n(n+1)abc-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3}{a^{n+3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{-nca+\frac{1}{2}n(n+1)b^2}{a^{n+2}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}$$

Untuk matriks segitiga bawah (B_5^{-n}):

$$B_5^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-nca+\frac{1}{2}n(n+1)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} & 0 & 0 \\ \frac{-nda^2+n(n+1)abc-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3}{a^{n+3}} & \frac{-nca+\frac{1}{2}n(n+1)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} & 0 \\ \frac{-nea^3+n(n+1)a^2bd+\frac{1}{2}n(n+1)c^2a^2-\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)acb^2+\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)b^4}{a^{n+4}} & \frac{-nda^2+n(n+1)abc-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3}{a^{n+3}} & \frac{-nca+\frac{1}{2}n(n+1)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}$$

c. Membuktikan bentuk umum matriks (A_5^{-n}) dan (B_5^{-n})

Pada pembuktian ini, [7] menggunakan matriks $(A_5^{\,n})$ dan $(B_5^{\,n})$ pada penelitian [6] tahun 2019. Dan akan ditunjukkan menggunakan aturan invers bahwa $A_5^{\,n}A_5^{\,-n} = A_5^{\,-n}A_5^{\,n} = I$ dan $B_5^{\,n}B_5^{\,-n} = B_5^{\,-n}B_5^{\,n} = I$.

Pertama akan membuktikan bentuk umum matriks segitiga atas $(A_5^{\,-n})$:

Teorema 2.4 Diberikan matriks segitiga atas

$$A_5 = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a,b,c,d,e \in R$$

maka:

$$A_5^{\,-n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{-nca+\frac{1}{2}n(n+1)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-nda^2+n(n+1)abc-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3}{a^{n+3}} & \frac{-nea^3+n(n+1)a^2bd+\frac{1}{2}n(n+1)c^2a^2-\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)acb^2+\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)b^4}{a^{n+4}} \\ 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{-nca+\frac{1}{2}n(n+1)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-nda^2+n(n+1)abc-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3}{a^{n+3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{-nca+\frac{1}{2}n(n+1)b^2}{a^{n+2}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}$$

Bukti: Pembuktian Teorema (2.4) telah dibuktikan pada laporan Tugas Akhir [7] pada halaman IV-16. Selanjutnya, pembuktian bentuk umum matriks segitiga atas $(B_5^{\,-n})$:

Teorema 2.5 Diberikan matriks segitiga bawah

$$B_5 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 & 0 \\ d & c & b & a & 0 \\ e & d & c & b & a \end{bmatrix}, \forall a,b,c,d,e \in R$$

maka:

$$B_5^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-nca + \frac{1}{2}n(n+1)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} & 0 & 0 \\ \frac{-nda^2 + n(n+1)abc - \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3}{a^{n+3}} & \frac{-nca + \frac{1}{2}n(n+1)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} & 0 \\ \frac{-nea^3 + n(n+1)a^2bd + \frac{1}{2}n(n+1)c^2a^2 - \frac{1}{2}n(n+1)(n+2)acb^2 + \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)b^4}{a^{n+4}} & \frac{-nda^2 + n(n+1)abc - \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3}{a^{n+3}} & \frac{-nca + \frac{1}{2}n(n+1)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}$$

Bukti: Pembuktian Teorema (2.5) telah dibuktikan pada laporan Tugas Akhir [7] pada halaman IV-49.

d. Membuktikan bentuk umum $tr(A_5^{-n})$ dan $tr(B_5^{-n})$ menggunakan pembuktian langsung.

Setelah diperoleh bentuk umum perpangkatan matriks segitiga 5×5 berpangkat bilangan bulat negatif, selanjutnya akan dibuktikan bentuk umum untuk *trace* matiks segitiga berpangkat bilangan bulat negatif dengan pembuktian langsung menggunakan definisi *trace* yang akan disajikan dalam Teorema 2.3 sebagai berikut:

Teorema 2.6 Diberikan matriks segitiga atas

$$A_5 = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d, e \in R$$

maka:

$$tr(A_5^{-n}) = 5\left(\frac{1}{a^n}\right)$$

Bukti. Pembuktian Teorema (2.6) telah dibuktikan pada laporan Tugas Akhir [7] pada halaman 33.

Teorema 2.7 Diberikan matriks segitiga bawah

$$B_5 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 & 0 \\ d & c & b & a & 0 \\ e & d & c & b & a \end{bmatrix}, \forall a,b,c,d,e \in R$$

maka:

$$tr(B_5{}^{-n}) = 5\left(\frac{1}{a^n}\right)$$

Bukti. Pembuktian Teorema (2.7) juga telah dibuktikan pada laporan Tugas Akhir [7] pada halaman 67.

2.6 Induksi Matematika [8]

Misalkan *p(n)* adalah proposisi perihal bilangan bulat positif dan kita ingin membuktikan bahwa *p(n)* benar untuk semua bilangan bulat positif n. untuk membuktikan proposisi ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. *p(1)* benar, dan
2. jika*p(n)* benar, maka *p(n+1)* juga benar untuk setiap $n \geq 1$.

Sehingga *p(n)* benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Langkah 1 dinamakan **basis induksi**, sedangkan langkah 2 dinamakan **langkah induksi**. Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa *p(n)* benar. Asumsi tersebut dinamakan **hipotesis induksi**. Bila kita sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa *p(n)* benar untuk semua bilangan bulat positif *n*.

Basis *induksi* digunakan untuk memperlihatkan bahwa pernyataan tersebut benar bila *n* diganti dengan 1, yang merupakan bilangan bulat posiitf terkecil. Kemudian kita harus memperlihatkan bahwa implikasi $p(n) \rightarrow p(n+1)$ benar untuk setiap bilangan bulat positif. Untuk membuktikan implikasi tersebut benar untuk setiap bilangan bulat positif *n*, kita perlu menunjukkan bahwa *p(n+1)*tidak mungkin salah bila *p(n)* benar. Hal ini diselesaikan dengan cara memperlihatkan bahwa berdasarkan hipotesis *p(n)* benar maka *p(n+1)* juga harus benar.

Contoh 2.11:

Tunjukkan bahwa untuk $n \geq 1$, $1+2+3+...+n = n(n+1)/2$ melalui induksi matematika.

Penyelesaian:

Andaikan bahwa *p(n)* menyatakan bahwa untuk $n \geq 1$, jumlah n bilangan bulat positif pertama adalah $n(n+1)/2$, yaitu $1+2+3+...+n = n(n+1)/2$. Harus dibuktikan kebanaran proposisi ini dengan dua langkah induksi sebagai berikut:

(i) *Basis induksi*:

Akan ditunjukkan $p(1)$ benar, maka:

$$\begin{aligned} p(1): 1 &= 1(1+1)/2 \\ &= 1(2)/2 \\ &= 2/2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Maka, $p(1)$ benar.

(ii) *Langkah induksi*:

Asumsikan *p(n)* benar, yaitu:

$$p(n): 1+2+3+...+n = n(n+1)/2,\ \forall n \in N, n \geq 1$$

Selanjutnya,

Akan dibuktikan *p(n+1)* juga benar, yaitu:

$$p(n+1): 1+2+3+...+n+(n+1) = (n+1)((n+1)+1)/2,\ \forall n \in N, n \geq 1$$

Untuk membuktikan ini, tunjukkan bahwa

$$1+2+3+...+n+(n+1) = (1+2+3+...+n)+(n+1)$$

$= [n(n+1)/2] + (n+1)$

$= [(n^2 + n)/2] + (n+1)$

$= [(n^2 + n)/2] + [(2n+2)/2]$

$= (n^2 + 3n + 2)/2$

$= (n+1)(n+2)/2$

$= (n+1)[(n+1)+1]/2$

Terbukti bahwa *p*(n+1) benar.

Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan benar, maka untuk semua bilangan bulat positif *n*, terbukti bahwa untuk semua $n \geq 1$, $1+2+3+...+n = n(n+1)/2$.

BAB III

METODE PENELITIAN

Metodologi penelitian merupakan langkah-langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan tugas akhir ini untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks simetris 5×5 berpangkat bilangan bulat. Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Diberikan matriks simetris $A_5=\begin{bmatrix}0&b&b&b&b\\b&0&b&b&b\\b&b&0&b&b\\b&b&b&0&b\\b&b&b&b&0\end{bmatrix},\forall b\in R,b\neq0$.
2. Menentukan perpangkatan matriks $A_5^{\ 2}$ sampai $A_5^{\ 10}$.
3. Menduga bentuk umum perpangkatan matriks $A_5^{\ n}$, dengan n bilanga bulat positif.
4. Membuktikan bentuk umum matriks $A_5^{\ n}$ dengan n bilangan bulat positif menggunakan pembuktian induksi matematika.
5. Membuktikan $tr(A_5^{\ n})$, n bilangan bulat positif dengan pembuktian langsung.
6. Menentukan invers dari matriks A_5 menggunakan metode adjoin.
7. Menentukan perpangkatan invers matriks $A_5^{\ -2}$ sampai $A_5^{\ -10}$.
8. Menduga bentuk umum perpangkatan matriks $A_5^{\ n}$, dengan n bilangan bulat negatif.
9. Membuktikan bentuk umum matriks $A_5^{\ n}$ dengan n bilangan bulat negatif menggunakan aturan invers yaitu $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.
10. Membuktikan $tr(A_5^{\ n})$ dengan n bilangan bulat negatif menggunakan pembuktian langsung.

11. Mengaplikasikan $tr(A_5^{\ n})$ dengan n bilangan bulat dengan beberapa contoh.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada Bab IV tentang *trace* matriks simetris 5×5 berpangkat bilangan bulat, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Diberikan matriks simetris 5×5

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix}, \forall b \in R$$

Maka diperoleh bentuk umum perpangkatan matriks simetris 5×5 berpangkat bilangan bulat positif, yaitu:

$$A_5{}^n = \begin{bmatrix} \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n \end{bmatrix}, \text{ atau}$$

$$A_5{}^n = [c_{ij}] = \begin{cases} \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n, i=j \\ \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n, i\neq j \end{cases}$$

2. Diberikan matriks simetris 5×5

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix}, \forall b \in R$$

Maka diperoleh bentuk umum matriks simetris 5×5 berpangkat bilangan bulat negatif, yaitu:

$$A_5^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5\cdot 4^n b^n} \end{bmatrix}, \text{ atau}$$

$$A_5^{-n} = [d_{ij}] = \begin{cases} \dfrac{\frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5}}{4^n b^n}, i = j \\ \dfrac{\frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5}}{4^n b^n}, i \neq j \end{cases}$$

3. Bentuk umum *trace* matriks simetris 5×5 berpangkat bilangan bulat positif yaitu:

$$tr(A_5^{\,n}) = (4^n - (-1)^{n+1}4)b^n$$

4. Bentuk umum *trace* matriks simetris 5×5 berpangkat bilangan bulat negatif yaitu:

$$tr(A_5^{\,n}) = \frac{(-1)^n 4^{n+1} + 1}{4^n b^n}$$

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini penulis membahas mengenai *trace* matriks simetis 5×5 berpangkat bilangan bulat. Disarankan bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini dapat mengembangkan dengan bentuk matriks simetris yang berordo lebih besar dari laporan tugas akhir ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] J. Pahade and M. Jha, "Trace of Positive Integer Power of Real 2x2 Matrices," *Adv. Linear Algebr. & Matrix Theory*, vol. 05, no. 04, pp. 150–155, 2015, doi: 10.4236/alamt.2015.54015.

[2] F. Aryani and M. Solihin, "Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bulat Negatif," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 3, no. 2, pp. 16–23, 2017, [Online]. Available:http://ejournal.uin-suska.ac.id/index.php/JSMS/article/download/4473/2759.

[3] A. Citra, "Trace Matriks Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif," 2019.

[4] K. Susilowati, "Trace matriks segitiga 4 x 4 berpangkat bilangan bulat negatif," 2020.

[5] H. Anton, *Elementary Linear Algebra Aplications Versian*. 2004.

[6] A. R. Hasibuan, "Trace matriks segitiga berpangkat bilangan bulat positif," 2019.

[7] Haslinda, *Trace Matriks Segitiga 5X5 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif*. 2020.

[8] R. Munir, "Matematika Disktrit," *Inform. Bandung*, pp. 281–308, 2010.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 18 Maret 1998 di Bukittinggi. Anak pertama dari dua bersaudara pasangan Bapak Alfi dan Ibu Nafsi . Penulis menyelesaikan pendidikan formal di Sekolah Dasar Negeri 20 Pahambatan pada tahun 2010. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan di Madrasah Tsanawiyah Balingka dan lulus pada tahun 2013. Pada tahun 2016 penulis menyelesaikan pendidikan di Madrasah Aliyah Negeri Koto Baru Padang Panjang dengan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA).

Setelah menyelesaikan pendidikan SMA pada tahun 2016, penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau tepatnya Fakultas Sains dan Teknologi dengan program studi Matematika. Pada pertengahan bulan Januari 2019 penulis melaksanakan kerja praktek di Kantor Kementerian Agama Provinsi Riau dan mengasilkan laporan kerja praktek dengan judul **“Analisis Deskriptif Penyaluran Dana Zakat Kepada Fakir Miskin Tahu 2015 - 2018 ”** yang dibimbing oleh Ibu Ade Novia Rahma, S.Pd, M.Mat. Pada Juli 2019, penulis malaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Terkul, Kecamatan Rupat, Kabupaten Bengkalis.

Pada 07 Juli 2021, penulis dinyatakan lulus dalam ujian sarjana dengan judul Tugas Akhir **“*Trace* Matriks Simetris 5 × 5 Berpangkat Bilangan Bulat”** dibawah bimbingan Ibu Fitri Aryani, M.Sc.